PROBLEMAS OLIMPIADA
Sesión de preparación 27-10-2017

Primera parte: Geometría

1. Repaso conocimientos elementales:
   a) Ángulos opuestos por el vértice.
   b) Casos de congruencia y semejanza de triángulos.
   c) Suma de los ángulos de un triángulo.
   d) Puntos notables en el triángulo: circuncentro, incentro, baricentro, ortocentro. Posición del baricentro. Casos particulares: triángulos equilátero, isósceles y rectángulo
   e) Circunferencia: ángulo central e inscrito. Igualdad de los segmentos de las tangentes trazadas desde un punto exterior.
2. Ampliación de la Geometría del triángulo.
   a) Alineación de puntos notables: recta de Euler.
   b) Fórmula de Euler: $d^2 = R(R - 2r)$.
   c) Teorema de la bisectriz.
   d) Teorema del seno.
   e) Fórmula de Herón.
   f) Teorema del coseno.
   g) Teorema de la mediana.
3. Ampliación de la Geometría de la circunferencia.
   a) Potencia de un punto respecto de la circunferencia.

1. Justifica que la bisectriz de un ángulo de un triángulo corta a la mediatriz del lado opuesto en un punto de la circunferencia circunscrita al triángulo.
2. Se considera una circunferencia de centro O y radio R. Sea I un punto cualquiera del círculo situado a una distancia a de O. Sea L un punto donde la mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia, y denotemos por M el punto donde la recta LI corta otra vez a la circunferencia. Justifica que $IM = R - \dfrac{a^2}{R}$.
3. Sea ABCD un cuadrilátero que se puede circunscribir a una circunferencia. Justifica que $AB + CD = BC + AD$.
4. Sea ABCD un cuadrilátero inscribible en una circunferencia. Justifica que $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.
5. Sobre cada lado de un triángulo cualquiera se construye un cuadrado exterior y se unen los vértices libres contiguos de dos cuadrados, formando tres triángulos más. Demostrar que las áreas de los nuevos triángulos son iguales al área del triángulo original. (Fase Local 2008)
6. Se considera un río rectilíneo y dos puntos A y B, distantes entre si 75 m, situados ambos al mismo lado del río y cuya distancia al mismo es respectivamente de 40 m y 19 m. Determina el camino mínimo que debe recorrer un jinete que parte de A y llega a B si debe alcanzar el río para que beba la cabalgadura.
7. Se considera un triángulo equilátero ABC de lado 1 y centro O. Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados AB, AC y BC (en el orden dado) hasta alcanzar el vértice A. Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

   (Nota. Cuando el ángulo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.) (Fase Local 2010)
8. Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribe un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución? (Fase Local 2008)